РЭШ
Российская
экономическая
школа

Мастер финансов (Masters in Finance)

Мастер наук по финансам (Master of Science in Finance)

Решения вступительных задач по математике, июнь 2015

1. По бессрочной облигации, начиная со следующего года, выплачивается купон, ежегодно увеличивающийся на 5% (первая выплата составляет 100 рублей). Чему равна цена этой облигации, если безрисковая процентная ставка составляет 5% годовых?

A 100 рублей

B 200 рублей

C 1000 рублей

D 2000 рублей

E ни одному из вариантов, перечисленных в A, B, C, D

Решение: E. Дисконтированная стоимость купона через год равна $100/(1+5\%)$. Аналогично, дисконтированная стоимость купона через два года равна $100\times(1+5\%)/(1+5\%)^2 = 100/(1+5\%)$, и все остальные равны тому же. Это означает, что сумма дисконтированных платежей и цена облигации бесконечны.

2. Известно, что безрисковая процентная ставка равна 10% годовых. По первой бескупонной облигации выплачивается 100 рублей через 1 год. Какой должна быть

выплата по второй бескупонной облигации через 3 года, чтобы их цены в настоящий момент были одинаковыми?

A 90 рублей

B 100 рублей

C 110 рублей

D 121 рубль

E 133 рубля

Решение: D. Стоимость первой облигации равна $100/(1 + 10\%) = 100/1.1$. Если выплата по второй облигации C, то её стоимость $C/1.1^3$. Следовательно, мы хотим, чтобы $C/1.1^3 = 100/1.1$, $C = 121$.

3. Цена акции через год уменьшится на 20% и через 2 года увеличится на 25%. На сколько процентов изменится цена акции за два года?

A уменьшится на 5%

B уменьшится на 20%

C не изменится

D увеличится на 5%

E увеличится на 25%

Решение: C. Совокупное изменение составит $(1 - 20\%) \times (1 + 25\%) = 1$, то есть цена не изменится.

4. Случайные величины X и Y имеют дисперсии $Var(X) = 1$ и $Var(Y) = 4$. Тогда дисперсия их суммы $Var(X+Y)$ может принимать любое значение из отрезка (и не может принимать никакие другие значения)

A [0, 4]

B [1, 9]

C [1, 5]

D [4, 9]

E [1, 16]

Решение: B. Мы можем расписать дисперсию суммы как

$$Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y) + 2cov(X,Y).$$

Известно, что выполняется неравенство

$$-\sqrt{Var(X)Var(Y)} \le cov(X,Y) \le \sqrt{Var(X)Var(Y)}.$$

Поэтому

$$Var(X)+Var(Y)-2\sqrt{Var(X)Var(Y)} \le Var(X+Y) \le Var(X)+Var(Y)+2\sqrt{Var(X)Var(Y)}.$$

Таким образом, правильный ответ — интервал в B.

5. Две бескупонные облигации с номиналом 100 рублей и погашением через год имеют вероятности дефолта (то есть вероятности того, что платежей по ним не будет) 5% и 10% соответственно. Вероятность их одновременного дефолта равна 1%. Чему равна совокупная стоимость этих двух облигаций, если ставка дисконтирования равна 10%?

A 150.2 рубля

B 158.2 рубля

C 160.2 рубля

D 168.2 рубля

E ни одному из вариантов, перечисленных в A, B, C, D

Решение: D. Портфель из двух облигаций платит 0 с вероятностью 1%, платит 100 с вероятностью (5%+10%-2%)=13% (при этом дефолт происходит только по одной облигации) и платит 200 с вероятностью 86%. Следовательно, стоимость такого портфеля

$$\frac{0 \times 1\% + 100 \times 13\% + 200 \times 86\%}{1+10\%} = \frac{185}{1.1} \approx 168.2.$$

6. По бессрочной облигации присходят выплаты в 100 рублей ежегодно, начиная со следующего года. При этом возможен дефолт, то есть каждый год с вероятностью 5% выплаты по облигации прекращаются. Известно, что ставка дисконтирования равна 5% годовых. Тогда цена облигации равна

A 950 рублей

B 1000 рублей

C 1900 рублей

D 2000 рублей

E 4000 рублей

Решение: A. С вероятностью 5% платежа не будет уже в первый год. С дополнительной вероятностью 95% первая выплата составит 100, и затем во второй год с вероятностью $95\% \times 5\%$ платежа не будет, а с вероятностью $95\% \times 95\%$ он произойдёт. Продолжая аналогично, мы получаем

$$\frac{95\% \times 100}{1+5\%} + \frac{(95\%)^2 \times 100}{(1+5\%)^2} + ... = \frac{95\% \times 100}{1+5\%}\left[1 + \frac{95\%}{1+5\%} + \frac{(95\%)^2}{(1+5\%)^2} + ...\right] =$$

$$= \frac{95}{1.05}\frac{1}{1-0.95/1.05} = \frac{95}{1.05}\frac{1.05}{1.05-0.95} = 950.$$

7. Касательная к кривой $x^2 + y^4 = 5$, проведенная в точке $x = 2, y = 1$ есть

A $x - y = 1$

B $2x - y = 3$

C $x - 2y = 0$

D $x + y = 3$

E $2x + y = 5$

Решение: D. Касательная к кривой $y = f(x)$ в точке $(x_0, y_0), y_0 = f(y_0)$ записывается как

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

Для подсчёта производной перепишем уравнение кривой как

$$y = (5 - x^2)^{1/4}.$$

Нас интересует именно корень с плюсом, так как мы ищем касательную в точке (2,1). Тогда производная равна $-\frac{2x}{4(5-x^2)^{3/4}}$, а её значение — -1. Следовательно, касательная выглядит как

$$y - 1 = -(x - 2), \quad x + y = 3.$$

8. Наибольшее значение функции $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$ на отрезке [-2, 3] равно

A -1

B 0

C 27

D -14

E 3

Решение: E. Отметим сначала, что максимизируется непрерывно дифференцируемая функция на отрезке, а значит, максимум находится среди точек экстремума или концов отрезка. Для нахождения экстремумов функции возьмём производную и приравняем к нулю:

$$f'(x) = 3x^2 - 6x, \quad 3x^2 - 6x = 0, x = 0, x = 2.$$

Таким образом, есть две внутренних точки как потенциальные максимумы и два конца отрезка -2, 3. Значения функции в них равны

$$f(-2) = -17, f(0) = 3, f(2) = -1, f(3) = 3.$$

Таким образом, максимальное значение функции на отрезке равно 3.

9. Функция $f(x, y) = x^4 + y^4$ на множестве $M = (x, y) : x^2 + y^2 = 1$

A достигает наибольшего значения ровно в одной точке

B достигает наибольшего значения ровно в двух точках

C достигает наибольшего значения ровно в трех точках

D достигает наибольшего значения ровно в четырех точках

E не достигает наибольшего значения ни в одной точке

Решение: D. Отметим, что максимизируется положительная функция на компактном множестве, а значит, у неё есть точки максимума. Мы можем переписать множество как $y^2 = 1 - x^2$, то есть функцию можно выразить через один аргумент как

$$g(x) = f(x, y) = x^4 + (1 - x^2)^2 = 2x^4 - 2x^2 + 1, \quad |x| \leq 1.$$

Следовательно, поскольку $2x^4 \leq 2x^2$, и равенство достигается только при $|x| = 1$ или $x = 0$, то максимум функции $f(x, y)$ достигается в точках $x = 1, y = 0$, $x = -1, y = 0$, $x = 0, y = 1$, $x = 0, y = -1$. Всего в четырёх точках.

10. Множество решений системы линейных уравнений

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

есть

A пустое множество

B множество $\{(x, y, z) : x = 0, y = 1, z = 1\}$

C множество $\{(x, y, z) : x = 1, y = 2, z = -1\}$

D множество $\{(x, y, z) : x \in R, y = 0, z = 1 + 3x\}$

E множество $\{(x, y, z) : x \in R, y = 2x - 2, z = 5 - 4x\}$

Решение: E. Заметим, что сумма двух первых строк матрицы равна третьей, и что первые две строчки независимы. Это означает, что у матрицы ранг 2. Одновременно и в правой части сумма двух первых чисел равна третьему. Следовательно, у системы бесконечное число решений, которые определены из первых двух уравнений — ответы A-C не подходят. Выражая y и z через x, мы получаем ответ E (или проверяем, что D не подходит, и остаётся только E).

РЭШ
Российская экономическая школа

Мастер финансов (Masters in Finance)

Мастер наук по финансам (Master of Science in Finance)

Решения вступительных задач по математике, июль 2015

1. За год цена акции выросла на 200%. Инфляция за этот период составила 100%. Считайте, что дивиденды не выплачивались. Тогда реальная доходность акции равна

A 20%

B 50%

C 100%

D 200%

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D

Решение: B. Подсчёт должен использовать деление, т.к. реальная доходность равна

$$r = \frac{1 + R_{nom}}{1 + \pi} - 1 = \frac{300\%}{200\%} - 1 = 50\%.$$

2. Выплаты по бессрочной облигации составят 210 рублей через год, 3 года, 5 лет и т. д. Чему равна цена облигации, если безрисковая процентная ставка составляет 10% годовых?

A 1000 рублей

B 1100 рублей

C 2000 рублей

D 2100 рублей

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D

Решение: B. Приведённая стоимость первой выплаты равна $210/(1+10\%)$, второй — $210/(1+10\%)^3$ и т.д. Следовательно, общая стоимость равна

$$P = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{210}{1.1^{2i+1}} = \frac{210}{1.1} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1.21^{i-1}} = \frac{210}{1.1} \frac{1}{1 - 1/1.21} = \frac{210}{1.1} \frac{1.21}{0.21} = 1100.$$

3. Цена акции через год увеличится на 50% с вероятностью p и уменьшится на 50% с вероятностью $1-p$. Чему равно p, если матожидание цены акции совпадает с ее текущей ценой? (Считайте, что цена акции положительна).

A 0.5

B 1

C 0.25

D 0.75

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D

Решение: A. Будущая цена акции равна $1.5S$ с вероятностью p и $0.5S$ с вероятностью $1-p$, а значит,

$$1.5S \times p + 0.5S \times (1-p) = S, \quad p = 0.5.$$

4. Вероятность того, что фирма обанкротися в кризис, равна $1/2$, а вероятность того, что фирма обанкротится, несмотря на то что кризиса нет, равна $1/20$. Чему равна вероятность того, что произошел кризис, если известно, что фирма обанкротилась (априори считаем, что вероятность кризиса $1/2$)?

A $1/20$

B $1/4$

C $1/2$

D 5/11

E 10/11

Решение: E. По формуле Байеса,

$$P(crisis|firm\,bankrupt) =$$

$$= \frac{P(firm\,bankrupt|crisis)P(crisis)}{P(firm\,bankrupt|crisis)P(crisis) + P(firm\,bankrupt|no\,crisis)P(no\,crisis)}.$$

Подставляя числа, получаем

$$\frac{0.5 \times 0.5}{0.5 \times 0.5 + 0.05 \times 0.5} = \frac{10}{11}.$$

5. Дивиденды по акции являются случайной величиной, выплачиваются до бесконечности, и в каждом периоде независимо от прошлого равны 100 рублей с вероятностью 90% и 0 рублей с вероятностью 10% в год (первые выплаты ожидаются через год). Чему равна цена акции, если ставка дисконтирования равна 5% годовых?

A 800 рублей

B 900 рублей

C 1400 рублей

D 1800 рублей

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D

Решение: D. Стоимость такой акции равна ожидаемым платежам поделить на ставку дисконтирования:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{100 \times 90\% + 0 \times 10\%}{(1 + 5\%)^i} = \frac{90}{1.05} \frac{1}{1 - 1/1.05} = \frac{90}{0.05} = 1800.$$

6. Даны две случайные величины X и Y , распределённые нормально со средними 0 и дисперсиями 1 и 2, соответственно. Известно, что X и Y независимы. Чему равна вероятность того, что обе величины X и Y положительны одновременно?

A 0

B 1/8

C 1/4

D 3/8

E 1/2

Решение: C. Поскольку X и Y независимы, то

$$P(X > 0, Y > 0) = P(X > 0)P(Y > 0) = 0.25.$$

Последнее равенство следует из того, что для гауссовской случайной величины с заданным средним вероятность быть больше, чем это среднее, равна 0.5.

7. Угол, под которым пересекаются кривые $y = 0$ и $y = x^2 - 1/4$ в точке (1/2, 0), равен

A 30°

B 45°

C 60°

D 75°

E 90°

Решение: B. Касательная к кривой $y = f(x)$ в точке $(x_0, y_0), y_0 = f(y_0)$ записывается как

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

Производная равна $2x$, а её значение в точке — 1. Следовательно, касательная выглядит как

$$y - 0 = (x - 0.5), \quad y - x = -0.5.$$

Она пересекается с осью под углом 45°.

8. Площадь между кривыми $y = x^3$ и $y = \sqrt{x}$ равна

A 1/12

B 1/4

C 1/3

D 5/12

E 1/2

Решение: D. Отметим сначала, что функции имеет смысл рассматривать только при $x \geq 0$ — иначе корень не определён. Кривые пересекаются в точках $x = 0$ и $x = 1$. Площадь между кривыми равна разности площади под кривой $y = \sqrt{x}$ (она находится выше на отрезке [0,1]) и площади под кривой $y = x^3$. Наконец, площадь считается как интеграл с пределами: для $\alpha \geq 0$

$$\int s^\alpha ds = C_0 + \frac{1}{1+\alpha} s^{1+\alpha}, \int\limits_{s=0}^{1} \sqrt{s} ds = \frac{2}{3}, \int\limits_{s=0}^{1} s^3 ds = \frac{1}{4}, \frac{2}{3} - \frac{1}{4} = \frac{5}{12}.$$

9. Функция $f(x, y, z) = x^2 + y^2$ на множестве $M = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$

A достигает наибольшего значения ровно в одной точке

B достигает наибольшего значения ровно в двух точках

C достигает наибольшего значения ровно в четырех точках

D достигает наибольшего значения ровно в восьми точках

E достигает наибольшего значения на множестве, состоящем из бесконечного числа точек

Решение: E. Отметим, что максимизируется положительная функция на компактном множестве, а значит, у неё есть точки максимума. Мы можем переписать множество как $x^2 + y^2 = 1 - z^2$, то есть функцию можно выразить через один аргумент как

$$g(z) = f(x, y) = 1 - z^2, \quad |z| \leq 1.$$

Следовательно, поскольку максимума эта функция достигает при $z = 0$, то точками максимума являются все точки множества , для которых $x^2 + y^2 = 1$. Таких точек бесконечно много.

10. Размерность линейной оболочки системы векторов

$$\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}4\\5\\6\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}7\\8\\9\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}5\\7\\9\end{bmatrix}$$

равна

A 0

B 1

C 2

D 3

E 4

Решение: C. Заметим, что сумма первого и третьего векторов равна четвёртому, то есть четвёртый линейно зависим с остальными, и его можно выбросить из базиса. При этом удвоенный второй вектор есть сумма первого и третьего, а значит, тоже линейно зависим с ними, его можно выбросить из базиса. Остаются первый и третий вектор, очевидно независимые друг от друга.

Мастер финансов (Masters in Finance)
Мастер наук по финансам (Master of Science in Finance)

Примеры экзаменационных задач по математике

Вариант 1

1. По бессрочной облигации, начиная со следующего года, выплачивается купон, ежегодно увеличивающийся на 10 рублей (первая выплата равна 100 рублям). Какова цена этой облигации, если безрисковая процентная ставка составляет 20% годовых?
A. 500 рублей
B. 600 рублей
C. 750 рублей
D. 1000 рублей
E. ни одному из вариантов, перечисленных в A–D
Решение: C. Первый платёж по сегодняшней стоимости равен $100/(1+20\%)$, второй платёж равен $110(1+10\%)/(1+20\%)^2$, и т.д. Стоимость облигации равна

$$P=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{100(1+0.1(i-1))}{1.2^i}=100\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1+0.1(i-1)}{1.2^i}=$$

$$=100\left[\frac{1/1.2}{1-1/1.2}+\frac{0.1/1.2^2}{(1-1/1.2)^2}\right]=750.$$

Общая формула для такой бессрочной облигации, где r — ставка дисконтирования, C — дополнительный купон, и 100 — номинал, есть

$$P=\frac{100}{r}+\frac{C}{r^2}.$$

2. Купонная облигация с номиналом \$1000 выплачивает 10%-ный купон каждый год в течение следующих 4 лет (первый платеж — через год). Как изменится цена облигации, если ставка дисконтирования упадет с 20% до 10% в год?
A. цена вырастет на \$43.33
B. цена вырастет на \$58.11
C. цена упадет на \$32.63
D. цена упадет на \$61.54
E. цена не изменится
Решение: B. Стоимость облигации равна

$$P_1=\frac{1000\times 10\%}{1+20\%}+\frac{1000\times 10\%}{(1+20\%)^2}+\frac{1000\times 10\%}{(1+20\%)^3}+\frac{1000\times 10\%}{(1+20\%)^4}=258.87.$$

После изменения ставки она изменяется до

$$P_2=\frac{1000\times 10\%}{1+10\%}+\frac{1000\times 10\%}{(1+10\%)^2}+\frac{1000\times 10\%}{(1+10\%)^3}+\frac{1000\times 10\%}{(1+10\%)^4}=316.98.$$

Стоимость вырастает, и примерно на 58.11.

3. Известно, что, выплачивая кредит, взятый под 10% годовых, ежегодными платежами по 100 тыс. рублей, вы погасите его за 5 лет (при этом первый платеж осуществляется через год после взятия кредита, и последний платеж будет равен ровно 100 тыс. рублей). Каков должен быть минимальный размер годового платежа, чтобы погасить кредит ровно за 10 лет?
A. 26 тыс. рублей
B. 56 тыс. рублей
C. 62 тыс. рублей
D. 75 тыс. рублей
E. 102 тыс. рублей
Решение: C. Посчитаем сегодняшнюю стоимость этого кредита по формуле аннуитета (с учётом того, что ставка дисконтирования для банка равна 10%):

$$P = \sum_{i=1}^{5} \frac{100000}{1.1^i} = \frac{100000}{0.1}\left(1 - \frac{1}{1.1^5}\right) = 379078.68.$$

Тогда для расчёта стоимости платежей для погашения за 10 лет нужно решить уравнение

$$\frac{C}{0.1}\left(1 - \frac{1}{1.1^{10}}\right) = 379078.68, \quad C = 61693.$$

4. Цена акции в конце каждого года увеличивается на 10% с вероятностью 1/2 и уменьшается на 10% с вероятностью 1/2. Какова вероятность того, что через 2 года цена акции будет такой же, как сегодня?
A. 0%
B. 25%
C. 50%
D. 75%
E. 100%
Решение: A. За два года цена акции может вырасти два раза, тогда её цена будет больше сегодняшней в $1.1^2 = 1.21$ раза; либо упасть два раза, тогда её цена будет меньше в $1.1^2 = 1.21$ раза; либо один раз вырасти и один раз упасть, и тогда её конечная стоимость будет $1.1 \times 0.9 = 0.99$ от сегодняшней. Соответственно, нет возможности, что цена акции будет равна сегодняшней, вероятность ноль.

5. Цена акции через год будет 100 рублей с вероятностью 1/2 и 200 рублей с вероятностью 1/2. Чему равно математическое ожидание вашего выигрыша через год, если вы имеете право купить одну акцию по цене 150 рублей через год (опцион на покупку акции).
A. 0 рублей
B. 25 рублей
C. 50 рублей
D. 75 рублей
E. 100 рублей
Решение: B. Исполнять опцион нужно только в случае, когда её цена не меньше 150, иначе опцион даст убыток. Поэтому выигрыш с вероятностью 0.5 равен 0 и с вероятностью 0.5 равен (200-150)=50. Математическое ожидание выигрыша равно $0.5 \times 50 = 25$.

6. Известно, что решающая статистика для проверки некоей гипотезы H_0 против альтернативной гипотезы H_1 подчиняется равномерному распределению на отрезке $[0, 1]$ при

условии, что верна гипотеза H_0, и стремится к единице, если верна гипотеза H_1. Значение статистики по выборке равно 0.96. Тогда гипотеза H_0 отвергается в пользу гипотезы H_1 на
A. 1% уровне значимости
B. 2.5% уровне значимости, но не на 1% уровне значимости
C. 5% уровне значимости, но не на 2.5% уровне значимости
D. 10% уровне значимости, но не на 5% уровне значимости
E. не отвергается на 10% уровне значимости
Решение: C. Поскольку при нулевой гипотезе распределение равномерное, то вероятность находиться в отрезке [0.95;1] равна 5%, а вероятность находиться в отрезке [0.975;1] равна 2.5%. Поэтому гипотеза отвергается на 5% уровне значимости и не отвергается на 2.5% уровне значимости — статистика равна 0.96 и как раз попадает в первый отрезок, но не попадает во второй.

7. Даны функция $f(x,y) = x^2$ и множество $M = \{(x,y)\colon xy = 1\}$. Тогда
A. наибольшее значение функции $f(x,y)$ на множестве M достигается в единственной точке
B. наибольшее значение функции $f(x,y)$ на множестве M достигается более чем в одной точке
C. наименьшее значение функции $f(x,y)$ на множестве M достигается в единственной точке
D. наименьшее значение функции $f(x,y)$ на множестве M достигается более чем в одной точке
E. все ответы A-D неверны
Решение: E. Отметим, что x может принимать на множестве M любые значения, а следовательно, функция не достигает на нём ни минимума, ни максимума.

8. Фигура на плоскости задана неравенствами $x^2 + y^2 \leq 1$ и $|x| + |y| \geq 1$. Площадь этой фигуры равна
A. π
B. 2π
C. $\pi - 1$
D. $\pi - 2$
E. $2\pi - 2$
Решение: C. Эта фигура выглядит как круг с убранным из него квадратом. Поскольку площадь всего круга равна π, а площадь квадрата — 1, то площадь фигуры равна разности.

9. Квадратичная форма $f(x) = x^T A x$ в R^3 задана матрицей

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -5 \end{bmatrix}$$

тогда
A. квадратичная форма $f(x)$ положительно определена
B. квадратичная форма $f(x)$ положительно полуопределена
C. квадратичная форма $f(x)$ отрицательно определена
D. квадратичная форма $f(x)$ отрицательно полуопределена
E. квадратичная форма $f(x)$ знакопеременная
Решение: E. Отметим, что применение этой функции к вектору (1;0;0) даёт число 1, а к вектору (0;0;1) — число -5. Следовательно, эта форма знакопеременная.

10. Дана матрица

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

. Выберите *ложное* утверждение

A. матрица A является проектором на одномерное подпространство

B. матрица A является невырожденной матрицей

C. матрица A является ортогональной матрицей

D. матрица A является кососимметричной матрицей

E. матрица A является квадратной матрицей

Решение: A. Поскольку детерминант матрицы равен 1, она автоматически невырожденная и не может быть проектором на одномерное подпространство. Остальные утверждения верны (невырожденность мы показали; ортогональность означает, что транспонированная матрица совпадает с собой — это верно; кососимметричность означает, что её элементы вне диагонали равны со знаком минус; квадратная матрица — это матрица с равным количеством строк и столбцов).

Вариант 2

11. Даны две компании. Вероятность дефолта первой из них равна 0.1, а вероятность дефолта второй компании при условии, что в первой также происходит дефолт, равна 0.5. Чему равна вероятность того, что дефолт произойдет в обеих компаниях?
A. 0
B. 0.05
C. 0.2
D. 0.8
E. 1
Решение: B. Дефолт обеих происходит только в случае, если в первой точно происходит дефолт — вероятность этого 0.1. По формуле условной вероятности,

$$P(default \quad first, default \quad second) = P(default \quad second | default \quad first) P(default \quad second) =$$
$$= 0.5 \times 0.1 = 0.05.$$

12. Номинал бескупонной облигации со сроком погашения 5 лет равен \$1000. Как изменится цена облигации, если ставка дисконтирования упадет с 20% до 10% в год?
A. цена вырастет на \$877.81
B. цена вырастет на \$219.04
C. цена упадет на \$219.04
D. цена упадет на \$877.81
E. цена не изменится
Решение: B. Стоимость облигации равна в эти два момента времени соответственно

$$P_1 = \frac{1}{1.2^5} = 401.88, \quad P_2 = \frac{1}{1.1^5} = 620.92.$$

Значит, цена вырастает на 219.04.

13. Чему равна безрисковая процентная ставка, если цена бессрочной облигации, по которой ежегодно, начиная со следующего года, выплачивается купон в \$100, равна \$2000?
A. 40% в год
B. 20% в год
C. 10% в год
D. 5% в год
E. 4% в год
Решение: D. Стоимость бессрочной облигации равна $coupon/rate$, поэтому ставка должна быть равна $100/2000 = 5\%$.

14. Цена акции в конце каждого года увеличивается на 100% с вероятностью 1/2 и уменьшается на 50% с вероятностью 1/2. Какова вероятность того, что через 2 года цена акции будет такой же, как сегодня?
A. 0%
B. 25%
C. 50%
D. 75%
E. 100%
Решение: C. Цена может два раза вырасти с вероятностью $(0.5)^2 = 0.25$ и увеличиться в 4 раза; цена может упасть два раза с вероятностью 0.25 и уменьшиться в 4 раза; если же цена

один раз растёт и один раз падает, то это случается с вероятностью 1-0.25-0.25=0.5, и цена оказывается равной $(1+100\%)(1-50\%)=1$.

15. Цена акции через год будет 100 рублей с вероятностью 1/2 и 200 рублей с вероятностью 1/2. Чему равно математическое ожидание вашего выигрыша через год, если вы имеете право продать одну акцию по цене 150 рублей через год (так называемый пут опцион).
A. 0 рублей
B. 25 рублей
C. 50 рублей
D. 75 рублей
E. 100 рублей
Решение: B. Если цена акции оказывается ниже 150, опцион не нужно исполнять — можно потерять деньги. Значит, при цене акции в 100 опцион приносит (150-100)=50, при цене в 200 опцион приносит 0, и ожидаемый выигрыш — $0.5 \times 50 = 25$.

16. Выборочное среднее данных из нормальной генеральной совокупности равно $\overline{x} = 10.32$. Известно, что истинное стандартное отклонение равно 10. Начиная с какого размера выборки на 5%-ном уровне значимости можно отвергнуть гипотезу о том, что матожидание данной нормальной генеральной совокупности равно нулю против гипотезы о том, что оно не равно нулю? (*Указание*: Двусторонний 95%-ный квантиль стандартного нормального распределения равен 1.96).
A. 4
B. 9
C. 16
D. 25
E. ни с какого размера
Решение: A. t-статистика для числа наблюдений N выглядит как

$$t = \frac{\overline{x}}{\sigma/\sqrt{N}}.$$

Здесь σ — стандартное отклонение по выборке. Значит, если хочется, чтобы эта дробь была больше 1.96 для отвержения нулевой гипотезы, необходимо, чтобы

$$\frac{\overline{x}}{\sigma/\sqrt{N}} \geq 1.96, \quad N \geq \left(\frac{1.96 \times 10}{10.32}\right)^2.$$

Ясно, что уже $N = 4$ удовлетворяет условию.

17. Уравнение касательной к графику функции $y = \dfrac{14x-5}{3x-2}$ в точке $(1, 9)$ есть
A. $13x - y = 4$
B. $x + 13y = 118$
C. $13x + y = 22$
D. $2x + 3y = 25$
E. $x - 13y = 116$
Решение: C. Касательная к кривой $y = f(x)$ в точке $(x_0, y_0), y_0 = f(y_0)$ записывается как

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

Заметим, что можно переписать уравнение кривой как

$$y = \frac{14}{3} + \frac{28/3 - 5}{3x - 2} = \frac{14}{3} + \frac{13}{9x - 6}.$$

Производная равна $-\frac{13\times 9}{(9x-6)^2}$, а её значение в точке — -13. Следовательно, касательная выглядит как

$$y - 9 = -13(x - 1), \quad 13x + y = 22.$$

18. Наименьшее значение функции $f(x, y) = 5x^2 + 5y^2 + xy - 3x + 3y - 15$ равно
A. -16
B. -14
C. -10
D. -2
E. 2
Решение: B. Функция выглядит ужасно. Но решение можно получить стандартным образом: взять производные по x и y и приравнять к нулю, и проверить, что это минимум.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 10x + y - 3 = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x} = 10y + x + 3 = 0, \quad x = 1/3, y = -1/3.$$

Значение функции в этой точке равно -14 — и это наименьшее значение функции, поскольку она выглядит как квадратичная и очевидно растёт при $x \to \infty$.

19. Квадратичная форма $f(x) = x^T Ax$ в R^3 задана матрицей

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

тогда
A. квадратичная форма $f(x)$ положительно определена
B. квадратичная форма $f(x)$ положительно полуопределена
C. квадратичная форма $f(x)$ отрицательно определена
D. квадратичная форма $f(x)$ отрицательно полуопределена
E. квадратичная форма $f(x)$ знакопеременная
Решение: E. Приведём матрицу к верхнетреугольному виду: вычитая удвоенную первую строку из второй, получаем матрицу

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

Прибавляя вторую строку к третьей, получаем матрицу

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Следовательно, у исходной матрицы есть как положительные, так и отрицательные собственные числа, то есть эта форма знакопеременная.

20. У системы линейных уравнений

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

множество решений
A. пустое
B. нульмерное
C. одномерное
D. двумерное
E. трехмерное
Решение: C. Отметим, что матрица вырожденная: сумма первой и третьей строки равна удвоенной второй, то есть ранг матрицы не более 2. Кроме того, ранг матрицы не меньше 2, потому что первые две строчки независимы. Следовательно, ранг матрицы равен 2. Отсюда следует, что можно решить эту систему и получить бесконечное множество решений с размерностью пространства решений 1 (то есть выразить, например, y и z через x).

Вариант 3

21. По бессрочной облигации, начиная со следующего года, выплачивается купон, ежегодно увеличивающийся на 5% (первая выплата составляет 100 рублей). Чему равна цена этой облигации, если безрисковая процентная ставка составляет 10% годовых?
A. 1333 рублей
B. 2000 рублей
C. 4000 рублей
D. 5000 рублей
E. ни одному из вариантов, перечисленных в A, B, C, D
Решение: B. Первый платёж по сегодняшней стоимости равен $100/(1+10\%)$, второй платёж равен $100(1+5\%)/(1+10\%)^2$, и т.д. Стоимость облигации равна

$$P=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{100(1.05)^{i-1}}{1.1^i}=\frac{100}{1.1}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(1.05)^{i-1}}{1.1^{i-1}}=\frac{100}{1.1}\frac{1}{1-1.05/1.1}=2000.$$

Общая формула для такой бессрочной облигации есть $100/(r-g)$, если $r>g$, где r — ставка дисконтирования, а g — скорость роста купона.

22. Купонная облигация с номиналом $1000 выплачивает 5%-ный купон каждый год в течение следующих 3 лет (первый платеж через год). Чему равна цена облигации, если безрисковая ставка равна 10% годовых?
A. $124.34
B. $156.32
C. $352.45
D. $1000
E. $1352
Решение: A. Стоимость облигации равна

$$P=\frac{1000\times 5\%}{1+10\%}+\frac{1000\times 5\%}{(1+10\%)^2}+\frac{1000\times 5\%}{(1+10\%)^3}=124.34.$$

23. Даны две компании. Вероятность дефолта первой из них равна 0.1, а вероятность дефолта обеих компаний вместе равна 0.08. Чему равна вероятность того, что произойдет дефолт во второй компании при условии, что в первой он произошел?
A. 0.08
B. 0.16
C. 0.2
D. 0.4
E. 0.8
Решение: E. По формуле условной вероятности,

$$P(default\quad second|default\quad first)=P(default\quad first,default\quad second)/P(default\quad first)=0.8.$$

24. Цена акции через год увеличится на 50% с вероятностью 1/2 и уменьшится на 50% с вероятностью 1/2. На сколько процентов в среднем изменится цена акции?
A. уменьшится на 50%
B. уменьшится на 25%
C. не изменится

D. увеличится на 75%
E. увеличится на 100%
Решение: C. Среднее изменение равно

$$-50\% \times 0.5 + 50\% \times 0.5 = 0.$$

25. Вы купили акцию предприятия, которое может оказаться «хорошим» или «плохим» с вероятностью 0.5. Акция «хорошего» предприятия с вероятностью 1 через год вырастет в цене. Акция «плохого» предприятия через год с вероятностью 1/4 вырастет, а с вероятностью 3/4 упадет в цене. Через год цена купленной акции выросла. Какова вероятность того, что это акция «хорошего» предприятия?
A. 1/3
B. 1/2
C. 2/3
D. 3/4
E. 4/5
Решение: E. По формуле Байеса,

$$P(good\, firm | stock\, appreciates) =$$

$$= \frac{P(stock\, appreciates | firm\, good) P(firm\, good)}{P(stock\, appreciates | firm\, good) P(firm\, good) + P(stock\, appreciates | firm\, bad) P(firm\, bad)}.$$

Подставляя числа, получаем

$$\frac{1 \times 0.5}{1 \times 0.5 + 0.25 \times 0.5} = 0.8.$$

26. В независимой серии из 9 испытаний по схеме Бернулли (например, бросая монетку) оказалось x успехов. Тогда на 5% уровне значимости можно отвергнуть гипотезу о том, что вероятность успеха равна 1/2, если (Указание: 2.5% точка стандартного нормального распределения равна 1.96)
A. $x = 2$
B. $x = 3$
C. $x = 4$
D. $x = 5$
E. ни при каком x из перечисленных в A, B, C, D
Решение: E. Среднее значение числа успехов при вероятности 0.5 равно 4.5, а стандартное отклонение числа успехов — $\sqrt{9 \times 0.25} = 1.5$). Следовательно, t-статистика равна

$$\frac{4.5 - x}{1.5} = 3 - \frac{2}{3}x.$$

Поэтому даже при $x = 2$ тестовая статистика принимает значение всего лишь $5/3 < 1.96$ — гипотезу нельзя отвергнуть ни при каком значении в задаче.

27. Площадь треугольника, образуемого отрезком касательной к графику функции $y = 2/x$ в точке $(1, 2)$ и отрезками координатных осей, равна
A. 1
B. 2
C. 3
D. 4

E. 6
Решение: D. Касательная к кривой $y = f(x)$ в точке $(x_0, y_0), y_0 = f(y_0)$ записывается как

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

Производная равна $-\frac{2}{x^2}$, а её значение в точке — -2. Следовательно, касательная выглядит как

$$y - 2 = -2(x - 1), \quad 2x + y = 4.$$

Точки пересечения с осями — (2,0) и (0,4). Следовательно, площадь треугольника равна 4.

28. Наибольшее значение функции $f(x, y) = 2\ln x + \ln y$ на множестве
$\{(x, y)\colon x > 0, y > 0, x + y = 3\}$ равно
A. $\ln 2$
B. $2\ln 2$
C. $3\ln 2$
D. $4\ln 2$
E. 2
Решение: B. Ясно, что максимум достигается при максимальных возможных значениях x при заданном y, то есть на границе $x + y = 3$. Следовательно, можно сделать замену:

$$f(x, y) = g(x) = 2\ln(x) + \ln(3 - x).$$

Беря производную по x, получаем

$$g'(x) = \frac{2}{x} - \frac{1}{3 - x}, \quad x = 2, y = 1.$$

Значение в этой точке равно $2\ln(2)$. Это максимум, потому что на границах ($x = 0$ или $y = 0$) значение функции приближается к минус бесконечности.

29. У матрицы

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

A. существует два положительных собственных числа
B. существует два отрицательных собственных числа
C. число 0 является собственным числом кратности 2
D. существует одно положительное и одно отрицательное собственные числа
E. не существует нулевого собственного числа
Решение: D. Заметим, что сумма первой и третьей строк матрицы равна удвоенной второй, что означает, что матрица вырожденная, и одно из собственных чисел — ноль. Теперь перейдём к новой матрице с нулевой второй строкой:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

и переставим первую и вторую строки:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

У подматрицы из второй и третьей строки ранг 2. Значит, есть два ненулевых собственных числа. Наконец, вычтем треть третьей строчки из второй, получается

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -4/3 & -2/3 & 0 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

Следовательно, у матрицы есть собственные числа ноль, положительное и отрицательное.

30. Размерность образа линейного оператора, который в некотором базисе пространства R^3 задается матрицей

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

равна
A. 0
B. 1
C. 2
D. 3
E. не определена
Решение: D. Суммируем удвоенную первую строчку и третью:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Это значит, что у матрицы ранг 2 (строки 1 и 2 независимы). Образ этого оператора имеет размерность 2.